

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

## 質傳效率於迴流型二行程圓柱同心套管質量交換器之研究

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC91-2214-E-032-002-

執行期間：91年08月01日至92年07月31日

執行單位：淡江大學化學工程與材料工程學系

計畫主持人：何啟東

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 92 年 9 月 23 日



計畫主持人：何啟東

中 華 民 國 92 年 9 月 22 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告  
質傳效率於迴流型二行程圓柱同心套管質量交換器之研究  
**The Theoretical Study of Mass Transfer Efficiency  
in Double-Pass Concentric Circular Tubes  
with External Refluxes**

計劃編號: NSC 91-2214-E-032-002

執行期限: 91 年 08 月 01 日至 92 年 07 月 31 日

主持人: 何啟東教授

執行機構及單位名稱: 淡江大學化工研究所

一、中文摘要(關鍵詞: 質量傳送、共軛格拉茲問題、迴流效應、正交展開法)

本研究是設計於圓形管加裝一可忽略厚度且可滲透之薄膜,使之成為一組固定外壁濃度具有迴流裝置之圓柱同心套管質量交換器。此一質傳系統是屬於共軛格拉茲問題(conjugated Graetz problem),利用分離變數法及正交展開方法(orthogonal expansion technique)求出解析解及其濃度分佈與謝瑪數,利用改變操作與設計參數,探討迴流效應對雙套管間質傳效率提昇之影響,並與單行程無迴流系統作比較。由結果顯示,本系統在薄膜位置偏離 1 及格拉茲數大時,其質傳效率有明顯的提昇。此外,迴流比對於系統的影響則依迴流型式不同,而有不同之影響。

英文摘要:(Keywords: Orthogonal expansion technique;  
Concentric circular tubes; External Refluxes;  
Conjugated Graetz problem; Mass transfer;)

A new device of double-pass mass exchanger is a circular tube with refluxes divided by inserting a permeable barrier into two subchannels with uniform wall concentration, resulting in considerable improvement of the device performance in mass transfer compared with that in an open conduit. Efficiency improvement in mass transfer has been studied analytically by using an eigenfunction expansion in power series. Analytical results show that suitable adjustment of the permeable-barrier position can effectively enhance the mass transfer efficiency, leading to improved performance. The effects of permeable-barrier position on mass transfer efficiency have been also delineated.

The analytical solutions to such a conjugated Graetz problem are obtained with the use of separation variables, and the resulting eigenvalue problem is solved

associated with the orthogonality conditions. The present study also discusses the improvement in mass transfer efficiency of such double-pass mass exchangers and the influence of the permeable-barrier position on the device performance.

## 二、計劃緣由與目的

由於流體的流動，伴隨著動量傳送、熱量傳送和質量傳送的現象，在許多工程領域中是相當常見的問題，尤其在化工程序中的設計與操作，更是一門值得深入研究的課題。為了能夠提升質量傳送的效率，外部迴流裝置在設計上的應用，非常廣泛被應用在吸附、發酵和聚合等方面[1-3]。當探討動量傳送和質量傳送的系統，若再加入迴流裝置，則其數學模型的建立與解析解的獲得就變得非常複雜和困難。此流體流動系統，最為人所熟悉的莫過於格拉茲問題(Graetz Problems)[4-5]。

本研究是將圓柱同心套管質量交換器系統以固定外管壁濃度並加裝一可滲透的中間薄膜，然後在兩端裝置幫浦產生外部迴流，並建立數學模型及理論推導來探討複雜的質量傳送問題。由於加入迴流裝置，因而衍生為共軛格拉茲問題(Conjugated Graetz Problems)[6-7]，為求得此共軛格拉茲問題的解析解，將以正交展開方法(Orthogonal Expansion Technique)[8-11]求出其濃度分佈和出口濃度，並探討迴流比值和可透性薄膜位置對此質量傳送的影響。

## 三、研究方法及成果

考慮一長度為  $L$ ，外管內徑為  $2R$  之雙套管質量交換器系統，並於管道間裝置一可忽略厚度  $u (<< 2R)$  之可滲透薄膜，此薄膜將系統分隔為二通道，其中內管之內徑為  $2/R$ ，外層管道之徑向長度為  $2(1-/)R$ ，並於二通道末端加裝一迴流裝置，使其成為一具迴流之同心圓柱型套管式質量交換器，其迴流型式可分為內管進料(如圖(一)所示)及外管進料(如圖(二)所示)兩種，兩迴流型式之外管壁皆假設為固定壁濃度  $C_w$ 。

整個系統的理論依據以下之假設而建立：

- (1) 流體之物性常數及管壁濃度為定值；
- (2) 流體為全展流與層流方式流經管道；
- (3) 忽略邊端效應、軸向質量擴散及中間薄膜之濃度極化效應；
- (4) 流體於入口及出口處為完全混合；

利用下列之無因次群，

$$\gamma = \frac{r}{R}, \quad \zeta = \frac{z}{L}, \quad \mathcal{E}_a = \frac{C_a - C_w}{C_i - C_w}, \quad \mathcal{E}_a = 1 - \mathcal{E}_a = \frac{C_a - C_i}{C_w - C_i}$$

$$\mathcal{E}_b = \frac{C_b - C_w}{C_i - C_w}, \quad \mathcal{E}_b = 1 - \mathcal{E}_b = \frac{C_b - C_i}{C_w - C_i}, \quad Gz_m = \frac{4V}{DfL}$$

可得無因次之質傳統治方程式與邊界條件如下：

$$\frac{v_a(y)R^2}{DL} \frac{\partial \mathcal{E}_a(y, \varsigma)}{\partial \varsigma} = \frac{1}{y} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial \mathcal{E}_a(y, \varsigma)}{\partial y} \right) \right] \quad (1)$$

$$\frac{v_b(y)R^2}{DL} \frac{\partial \mathcal{E}_b(y, \varsigma)}{\partial \varsigma} = \frac{1}{y} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial \mathcal{E}_b(y, \varsigma)}{\partial y} \right) \right] \quad (2)$$

其中，內管進料之迴流模型之速度分佈為：

$$v_a(y) = 2\bar{v}_a \left( 1 - \left( \frac{y}{/} \right)^2 \right) \quad (3)$$

$$v_b(y) = \frac{-2\bar{v}_b}{\left[ \frac{1-/^4}{1-/^2} - \frac{1-/^2}{\ln \frac{1}{/}} \right]} \left[ 1 - (y)^2 + \left( \frac{1-/^2}{\ln \frac{1}{/}} \right) \ln y \right] \quad (4)$$

而外管進料之迴流模型之速度分佈為：

$$v_a(y) = -2\bar{v}_a \left( 1 - \left( \frac{y}{/} \right)^2 \right) \quad (5)$$

$$v_b(y) = \frac{2\bar{v}_b}{\left[ \frac{1-/^4}{1-/^2} - \frac{1-/^2}{\ln \frac{1}{/}} \right]} \left[ 1 - (y)^2 + \left( \frac{1-/^2}{\ln \frac{1}{/}} \right) \ln y \right] \quad (6)$$

$$\text{其中 } \bar{v}_a = \frac{(M+1)V}{f(R)^2}, \quad \bar{v}_b = \frac{(M+1)V}{fR^2 - f(/R)^2}, \quad (7)$$

方程式(1)與(2)之邊界條件如下：

$$\frac{\partial \mathcal{E}_a(0, \varsigma)}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

$$\mathcal{E}_b(1, \varsigma) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_a(/, \varsigma)}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{E}_b(/, \varsigma)}{\partial y} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_a(/, \varsigma)}{\partial y_a} = S[\mathcal{E}_a(/, \varsigma) - \mathcal{E}_b(/, \varsigma)] \quad (11)$$

且平均出口濃度為

$$\mathcal{E}_F = \frac{C_F - C_w}{C_i - C_w} \quad (12)$$

利用分離變數法，將變數轉換為

$$\mathcal{E}_a(y, \varsigma) = \sum_{m=0}^{\infty} S_{a,m} F_{a,m}(y) G_m(\varsigma) \quad (13)$$

$$\mathcal{E}_b(y, \varsigma) = \sum_{m=0}^{\infty} S_{b,m} F_{b,m}(y) G_m(\varsigma) \quad (14)$$

代入式(1)和(2)與邊界條件式(8)至式(11)，可得：

$$G_m(\varsigma) = e^{-\lambda_m(1-\varsigma)} \quad (15)$$

$$F_{a,m}''(y) + \frac{F_{a,m}'(y)}{y} - \frac{\nu_a(y) R^2}{DL} \lambda_m F_{a,m}(y) = 0 \quad (16)$$

$$F_{b,m}''(y) + \frac{F_{b,m}'(y)}{y} - \frac{\nu_b(y) R^2}{DL} \lambda_m F_{b,m}(y) = 0 \quad (17)$$

$$F_{a,m}'(0) = 0 \quad (18)$$

$$F_{b,m}(1) = 0 \quad (19)$$

$$S_{a,m} F_{a,m}'(\zeta) = S_{b,m} F_{b,m}'(\zeta) \quad (20)$$

$$S_{a,m} F_{a,m}'(\zeta) = S_{b,m} F_{b,m}'(\zeta) \quad (21)$$

利用級數解求解式(16)與式(17)兩常微分方程式，令  $F_{a,m}(y_a)$  及  $F_{b,m}(y_b)$  分別為  $y_a$  和  $y_b$  的函數，並配合式(18)與式(19)，可以求得下列關係：

$$F_{a,m}(y_a) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{mn} y_a^n, \quad d_{m1} = 0, \quad d_{m0} = 1 (\text{選定值}) \quad (22)$$

$$F_{b,m}(y_b) = \sum_{n=0}^{\infty} e_{mn} y_b^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} e_{mn} = 0, \quad e_{m0} = 1 (\text{選定值}) \quad (23)$$

結合式(20)與式(21)得：

$$\frac{S_{a,m}}{S_{b,m}} = \frac{F_{b,m}'(\zeta)}{F_{a,m}'(\zeta)} = \frac{S_{b,m} F_{b,m}'(\zeta)}{S_{a,m} F_{a,m}'(\zeta)} \quad (24)$$

因此，將式(22)及式(23)分別代入式(16)及式(17)，可將所有  $d_{mn}$  與  $e_{mn}$  以特徵值來表示，再由式(24)可求出特徵值。又由式(16)至式(21)可得正交性質之積分方程，當  $n \neq m$ ，

$$\int_0^1 \left[ \frac{\nu_a \cdot R^2}{L \cdot D} \right] S_{a,m} S_{a,n} y F_{a,m} F_{a,n} dy + \int_1^1 \left[ \frac{\nu_b \cdot R^2}{L \cdot D} \right] S_{b,m} S_{b,n} y F_{b,m} F_{b,n} dy = 0 \quad (25)$$

此外，作兩同心圓柱套管之質量平衡，可得

$$\nu(1 - \mathcal{E}_F) = \int_0^1 D_2 \mathcal{L} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{b,m}(1, \varsigma)}{\partial y} \right) d\varsigma$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_F = 1 - \mathcal{E}_F &= \int_0^1 \frac{D_2 f L}{V} \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{b,m}(1, \zeta)}{\partial y} \right) d\zeta \\
&= \frac{D_2 f L}{V} \sum_{m=0}^{\infty} S_{b,m} F'_{b,m}(1) \int_0^1 e^{-\lambda_m(1-\zeta)} d\zeta \\
&= \frac{8 \lambda_m}{Gz_m} \sum_{m=0}^{\infty} S_{b,m} F'_{b,m}(1) (1 - e^{-\lambda_m}) \quad (26)
\end{aligned}$$

內管進料迴流模型之出口濃度可寫成以下的積分式：

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_F &= - \frac{\int_0^1 v_b 2fR^2 y \mathcal{E}_b(y, 0) dy}{V} \\
&= \frac{-8}{Gz_m(M+1)} \sum \frac{e^{-\lambda_m} S_{b,m}}{\lambda_m} [F'_{b,m}(1) - F'_{b,m}(\zeta)] \quad (27)
\end{aligned}$$

同理，外管進料之出口濃度則為

$$\mathcal{E}_F = \frac{-8}{Gz_m(M+1)} \sum \frac{e^{-\lambda_m} S_{a,m}}{\lambda_m} \cdot F'_{a,m}(\zeta) \quad (28)$$

當求得所有的特徵值，可以先假設一出口濃度  $\mathcal{E}_F$  值，由式(20)、式(21)、式(25)與式(27)或式(28)求得未知的變數  $S_{a,m}$  與  $S_{b,m}$ 。再以質量平衡方程式(26)來驗證  $\mathcal{E}_F$  值，若兩個值的誤差小於  $1 \times 10^{-5}$ ，則  $\mathcal{E}_F$  即為所求。

質傳效率之改善則以平均 Sherwood 數來表示，其中平均 Sherwood 數之定義如下：

$$\overline{Sh} = \frac{\overline{k_m D_e}}{D} = \frac{V}{fDL} (1 - \mathcal{E}_F) = \frac{1}{4} Gz_m (1 - \mathcal{E}_F) \quad (29)$$

而與單行程無迴流模型比較，計算其質傳效率增加百分比， $I_m$ ，可定義為：

$$I_m = \frac{\overline{Sh} - \overline{Sh}_0}{\overline{Sh}_0} = \frac{\mathcal{E}_{0,F} - \mathcal{E}_F}{1 - \mathcal{E}_{0,F}} = \frac{\epsilon_F - \epsilon_{0,F}}{\epsilon_{0,F}} \quad (30)$$

#### 四、結論與討論

於具迴流之雙套管質傳系統中，影響質傳效率的主要因素為流體於各管道中的質傳係數與預混效應的競爭。圖(三)和圖(四)個別是內管進料模型與外管進料模型對平均 Sherwood 數  $\overline{Sh}$  或  $\overline{Sh}_0$  所作的比較。由圖(三)中可發現當迴流比值越大，內管進料模型的質傳效率越好；對外管進料模型而言則是迴流比值越小，質傳效率越好。由圖(三)和圖(四)也可看出，當薄膜位置越偏離 1，對此兩種迴流模型都有較高的質傳效率。此外，迴流效應可增加流體流速，提昇質傳係數，此現象於質傳格拉茲數大時(即管道愈短或流量愈大)之效果更為明顯的，遠大於單行程的質傳效率甚多。由式(30)之定義，可將此二迴流型式系統對單行程系統作一比較，分別由表(一)及表(二)所示，結果顯示， $\zeta > 0.7$  時，效率提昇率均為負值，



而當  $\beta < 0.5$  且  $Gz_m \geq 100$  時，則此二種迴流模型都比單行程質傳系統有更好的質傳效果。

## 五、符號說明

$C_i$  進口濃度,  $\text{mole/cm}^3$

$C_w$  外壁濃度,  $\text{mole/cm}^3$

$C$  流體濃度,  $\text{mole/cm}^3$

$D$  兩成份混合之擴散係數,  $\text{cm}^2/\text{s}$

$Gz_m$  質傳格拉茲數,  $4V/DfL$

$I_m$  質傳效率改善率

$\overline{k_m}$  平均質傳係數,  $\text{cm}^2/\text{s}$

$M$  迴流比值

$\overline{Sh}$  平均 Sherwood 數

$S_m$  展開係數隨特徵值  $\lambda_m$  而變

$V$  進口體積流率,  $\text{cm}^3/\text{s}$

希臘符號：

$\gamma$  無因次徑向座標

$\mu$  無因次濃度,  $(C - C_0)/(C_w - C_0)$

$\nu$  薄膜之孔隙度

$u$  薄膜之厚度

$\phi$  薄膜位置比值

$\zeta$  無因次軸向座標

$\mathcal{E}$  無因次濃度,  $(C - C_w)/(C_0 - C_w)$

$S$  薄膜之設計參數,  $RV/u$

上下標：

$a$  內管道

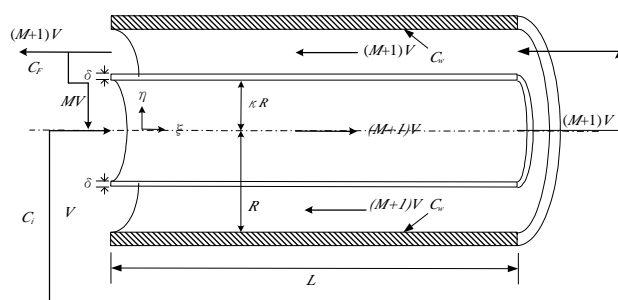
$b$  外管道

$F$	出口處
$I$	管道進口處
$W$	外管壁位置

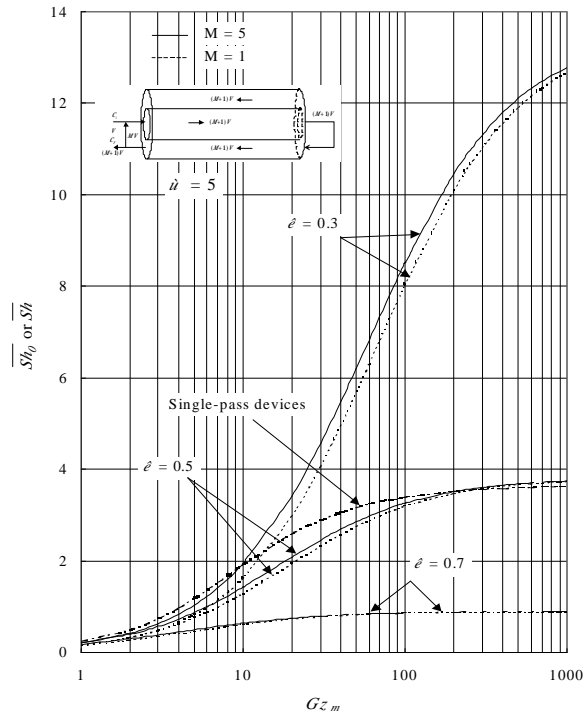
**致謝-**本研究承行政院國家科學委員會補助經費(NSC 91-2214-E-032-002)，特此致謝。

## 六、參考文獻

1. Siegel, M. H., Merchuk, J. C., and Schugerl, K., Air-Lift Reactor Analysis: Interrelationships Between Riser, Downcomer, and Gas-Liquid Separator Behavior, Including Gas Recirculation Effects, *AIChE J.*, 1986, **32**, 1585-1595.
2. Jones, A. G., Liquid Circulation in a Drift-Tube Bubble Column, *Chem. Eng. Sci.*, 1985, **40**, 449-462.
3. Marquart, R., Circulation of High-Viscosity Newtonian and Non-Newtonian Liquids in Jet Loop Reactor, *Int. Chem. Eng.*, 1981, **20**, 399-407.
4. Shah, R. K. and London, A. L., *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*. Academic Press, New York, 1978, p.169,
5. Dang, V-D., and Steinberg, M., Convective Diffusion with Homogeneous and Heterogeneous Reaction in a Tube, *J. Phys. Chem.*, 1980, **84**, 214-219.
6. Papoutsakis, E., and Ramkrishna, D., Conjugated Graetz Problems. II: Fluid-Fluid Problems, *Chem. Eng. Sci.*, 1981, **36**, 1393-1399.
7. Yin, X. and Bau, H. H. The Conjugated Graetz Problem with Axial Conduction, *Trans. ASME*, **118**, 482-485 (1996).
8. Yeh, H. M., Tsai, S. W., and Lin, C. S., A Study of the Separation Efficiency in Thermal Diffusion Columns with a Vertical Permeable Barrier, *AIChE J.*, 1986, **32**, 971-980.
9. Ebadian, M. A. and Zhang, H. Y., An Exact Solution of Extended Graetz Problem with Axial Heat Conduction, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1989, **32**, 1709-1717.
10. Ho, C. D., Yeh, H. M and Sheu, W. S, An Analytical Study of Heat and Mass Transfer Through a Parallel-Plate Channel with Recycle, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 1998, **41**, 2589-2599.



圖（一） 內管進料之迴流模



圖（三）內管進料模型， $S=5$ ，改變不同迴流比

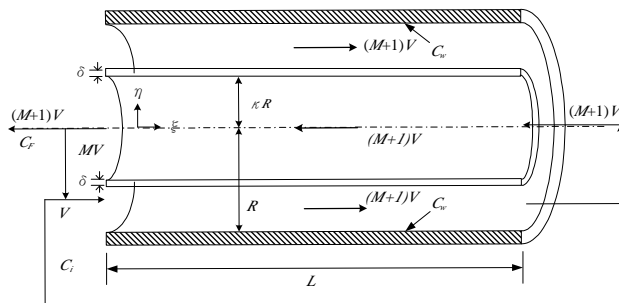
表（一）內管進料模型以迴流比值及薄膜位置為參數之質傳

$I_m$ (%)	$M = 0$			$M = 1$			$M = 3$			$M = 5$		
	/			/			/			/		
	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7
$Gz_{m0}=1$	-40.0	-39.9	-42.3	-33.4	-33.2	-37.4	-20.0	-20.3	-29.6	-14.3	-15.3	-26.9
100	-22.8	-36.3	-68.3	-15.3	-32.8	-67.6	-2.7	-27.2	-66.5	1.6	-25.3	-66.2
1000	129.5	-6.9	-74.6	136.3	-5.9	-74.6	146.9	-4.3	-74.4	150.6	-3.8	-74.4
10000	247.5	3.0	-75.2	249.0	3.1	-75.2	251.3	3.3	-75.2	252.0	3.4	-75.2

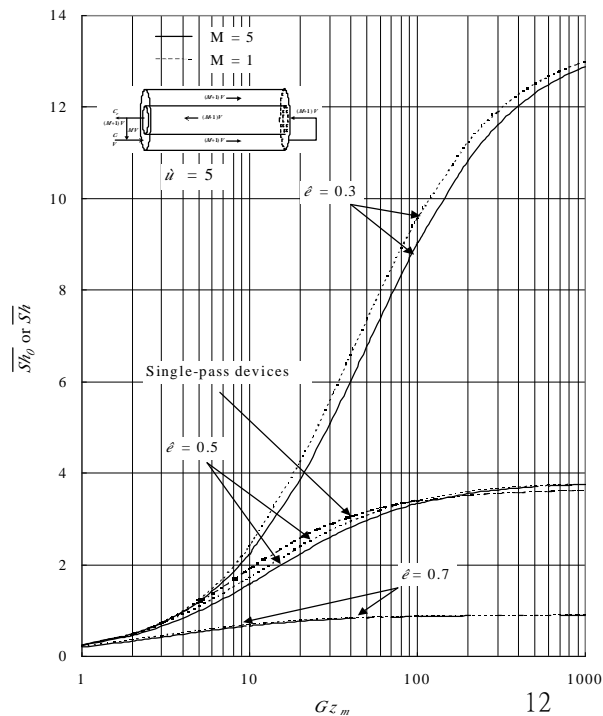
表（二）外管進料模型以迴流比值及薄膜位置為參數之質傳效率

$I_m$ (%)	$M = 0$			$M = 1$			$M = 3$			$M = 5$		
	/			/			/			/		
	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7
$Gz_m = 1$	0.0	0.0	-6.2	0.0	0.0	-8.9	0.0	-0.6	-14.5	0.0	-1.4	-16.8
10	27.8	-5.6	-62.2	25.7	-9.5	-63.0	19.7	-15.4	-64.2	16.9	-17.4	-64.6
100	190.0	1.7	-74.0	181.7	0.6	-74.1	169.6	-1.1	-74.2	165.7	-1.6	-74.3
1000	259.6	4.0	-75.1	258.1	3.9	-75.1	256.4	3.7	-75.2	255.0	3.6	-75.2

11. Ho, C. D., Yeh, H. M and Chiang S. C, A Study of Mass Transfer Efficiency in a Parallel-Plate Channel with External Refluxes, *Chem. Eng. J.*, 2002, **85**, 207-214.



圖（二）外管進料之迴流模



圖(四) 外管進料模型， $S=5$ ，改變不同迴流比。